08/03/18

Διάλεξη 5η

$Y=\sum_{1}^{n} a_i X_i$, $X_i$ ανεξ. τ.μ.

$E(Y)=\sum_{1}^{n} a_i E(X_i)$

$Var(Y)=\sum_{1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$

$m_X(t)=E(e^{tX})$.

$X\sim G(\alpha,\beta) \rightarrow f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$ και $m_X(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

**Θεώρημα 1:** $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με μέση τιμή $\mu$ και διακύμανση $\sigma^2$, τότε:

(i) $E(\bar{x})=\mu$

(ii) $Var(\bar{x})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(iii) $E(S^2)=\sigma^2$

$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$.

**Πόρισμα:** $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ τ.δ. από πληθυσμό $1(\mu_1,\sigma_1^2)$

και $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ τ.δ. από πληθυσμό $2(\mu_2,\sigma_2^2)$

(i) $E(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=\mu_1-\mu_2$ (ii) $Var(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$.

---

$\bar{x}_1=\dfrac{1}{n_1}\sum_{1}^{n_1} x_{1i}$

$\bar{x}_2=\dfrac{1}{n_2}\sum_{1}^{n_2} x_{2i}$

(*) Η διακύμανση ισούται με το μηδέν, όταν όλες οι τιμές είναι ίδιες.

$P(X=x)=\frac{1}{3}$ , $x=3,4,5$

Πληθ. $X=3,4,5$

$P_x : \frac{1}{3}$

$\mu=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\, 5=4.$

$\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{50}{3}-4^2=\frac{2}{3}$ όπου $E(X^2)=\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{3}\cdot 4^2+\frac{1}{3}\cdot 5^2$
$=\frac{50}{3}.$

$\bar{X}$, $S^2$ για δειγματοληψία $n=2$ με επανατοποθέτηση.

Δυνατά δείγματα:

| | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (5,3) | (5,4) | (5,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$: | 3 | 3.5 | 4 | 3.5 | 4 | 4.5 | 4 | 4.5 | 5 |
| $s^2$: | 0 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0.5 | 2 | 0.5 | 0 |

9 δυνατά δείγματα

---

| $\bar{X}=\bar{x}$ : | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_{\bar{x}}$ : | 1/9 | 2/9 | 3/9 | 2/9 | 1/9 |

$\bar{X} \sim$ καταν. ($\mu=4$, )

$E(\bar{X})=3\cdot\frac{1}{9}+\ldots+5\cdot\frac{1}{9}=4\ (=\mu)$ | $E(\bar{X}^2)=\frac{1}{9}3^2+\ldots+\frac{1}{9}5^2=\frac{147}{9}$

$Var(\bar{X})=\frac{147}{9}-4^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\ \left(=\frac{2/3}{2}=\frac{\sigma^2}{n}\right)$

| $S^2=s^2$: | 0 | 0.5 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P_{S^2}$ : | $\frac{3}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

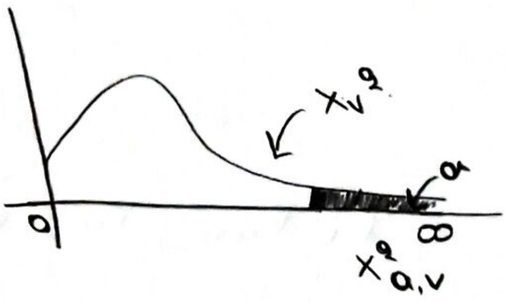
$E(S^2)=0\,\frac{3}{9}+0.5\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
$=\sigma^2.$

**Κατανομή $\chi_\nu^2$:** $Z_1,\dots,Z_\nu$ ανεξ. και ισόνομες $N(0,1)$

$Y = Z_1^2+\dots+Z_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$, τότε $Y\sim\chi_\nu^2$.

$$\chi_\nu^2 = G\left(a=\frac{\nu}{2},\ \beta=2\right) \quad \| \quad E(\chi_\nu^2)=\nu,\ Var(\chi_\nu^2)=2\nu$$

$$\boxed{m_Y(t)=(1-2t)^{-\nu/2}}$$




$$P(\chi_\nu^2 \geq \chi_{a,\nu}^2)=a$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = Z_1^2+Z_2^2 \sim \chi_2^2 \\ Y_2 = Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2 \sim \chi_3^2 \end{array}\right\} Y_1+Y_2\sim\chi_5^2$$

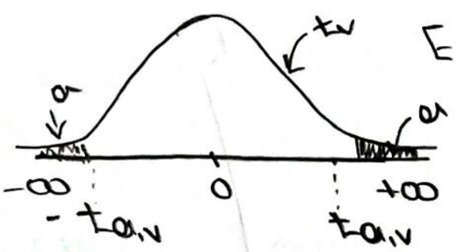
**Κατανομή $t_\nu$ - t με ν βαθμούς ελευθερίας:**

Έστω τ.μ. $Z\sim N(0,1)$ και ανεξ. τ.μ. $Y\sim\chi_\nu^2$.

$$T=\frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}\left(=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}}\right)\sim t_\nu$$

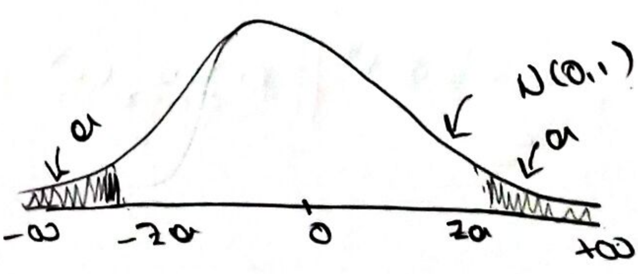
$$\boxed{t_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} N(0,1)}$$

$E(t_\nu)=0$




$$P(t_\nu \geq t_{a,\nu})=a$$

**Κανονική κατανομή:**

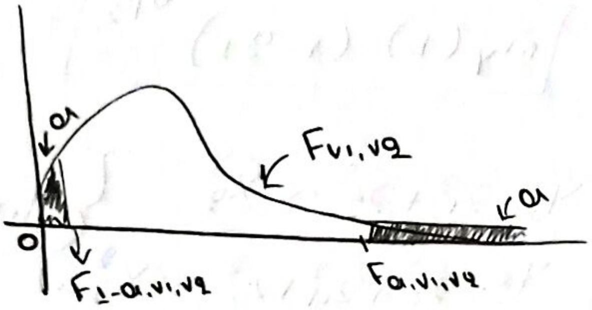



$$P(Z\geq z_a)=a$$

Κατανομή $F_{\nu_1,\nu_2}$ - F4 με $\nu_1$ και $\nu_2$ βαθμούς ελευθερίας:

$X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ και $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ και ανεξ. τ.μ.

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \left( = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2} \right) \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$




$P(F_{\nu_1,\nu_2} \geq F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = \alpha$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι: $\underbrace{\boxed{F_{1-\alpha,\nu_2,\nu_1} = \dfrac{1}{F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}}}_{\text{SOS!}}$

Θεώρημα 2: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από κανονικό πληθυσμό $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε: (i) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(ii) $\bar{X}$ και $S^2$ ανεξ. τ.μ.

(iii) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

αποδ.: ii) αν $(X_i, X_i-\bar{X})=0$ και επειδή οι κανονικές τ.μ. είναι ασυσχέτιστες και ανεξάρτητες

i) $m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ || $m_{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i}(t) = m_{\sum_1^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right)$

$= m_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \dots m_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$

$= m_X\left(\frac{t}{n}\right) \dots m_X\left(\frac{t}{n}\right)$

$= e^{\cancel{n}\mu \frac{t}{\cancel{n}} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n}}$

$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\cdot t^2}$

$\Rightarrow m_{\bar{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\cdot t^2}$

Υπόδειξη για το (iii): $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_1^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_1^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} - \dfrac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$